

0. SOBRE LES GUIES DELS LLIBRES.

La guia de cada llibre consta de tres apartats:

- Índex
- Esquema
- Comentaris

Als comentaris hi ha un primer punt d'observacions generals que cal tenir en compte en programar el tema.

Al tema 1, a més dels apartats assenyalats, hi figura, a títol d'exemple, la programació diària que es va fer durant un curs en un Institut.

Per tal de facilitar la programació interdisciplinar, al final de cada esquema s'inclouen els temes relacionats d'altres matèries que figuren en el text.

GUIA DEL LLIBRE 2: ESTUDI DE LES FUNCIONS LINEALS I QUADRÀTIQUES

I. ÍNDEX

A. INTRODUCCIÓ

B. QUE ÉS UNA FUNCIÓ

1. Aproximació al concepte de funció
2. Correspondència i funció
3. Simbolització
4. Gràfiques cartesianes

C. FUNCIÓ DE PROPORCIONALITAT

- Problemes d'aplicació

D. FUNCIONS QUE TENEN PER GRÀFICA UNA RECTA

- Problemes d'aplicació

E. EQUACIONS DE PRIMER GRAU AMB UNA INCÒGNITA I SISTEMES DE DUES EQUACIONS LINEALS AMB DUES INCÒGNITES

1. Equacions de primer grau
2. Sistemes de dues equacions lineals amb dues incògnites

F. INEQUACIONS LINEALS. SISTEMES D'INEQUACIONS

1. Inequacions lineals amb una incògnita
2. Inequacions lineals amb dues incògnites i sistemes d'inequacions

G. PROBLEMES DE CONSOLIDACIÓ

H. ESTUDIS

- H.1. Estudi de l'impost sobre el rendiment del treball personal (IRTP)
- H.2. Estudi sobre l'índex del cost de la vida
- H.3. Estudi de la facturació elèctrica.

I. LA FUNCIO POLINÒMICA DE SEGON GRAU

- 1. Introducció
- 2. Estudi de la funció polinòmica de segon grau. La paràbola
 - 2.1. Contraccions i dilatacions
 - 2.2. Translacions en les direccions dels eixos
 - 2.3. Translacions en general
 - 2.4. Determinació d'una funció polinòmica de segon grau. Sistemes de tres equacions lineals amb tres incògnites.

J. ZEROS DE LA FUNCIO POLINÒMICA DE SEGON GRAU. EQUACIONS DE SEGON GRAU

- 1. Resolució de l'equació de segon grau completant quadrats
- 2. Resolució de l'equació de segon grau per descomposició en factors
- 3. Equacions i sistemes d'equacions que poden reduir-se a una equació de segon grau

K. INEQUACIONS DE SEGON GRAU AMB UNA INCÒGNITA

L. INTERPOLACIÓ

M. PROBLEMES DE CONSOLIDACIÓ

P. APÈNDIX 1. POLINOMIS I FRACCIONS ALGÈBRIQUES

I. POLINOMIS

- 1. Introducció
- 2. Suma i producte de polinomis
- 3. Divisió de polinomis
- 4. Divisió d'un polinomi en x pel binomi $x-a$. Regla de Ruffini

5. Descomposició d'un polinomi en factors en casos senzills
6. Polinomis amb més d'una indeterminada

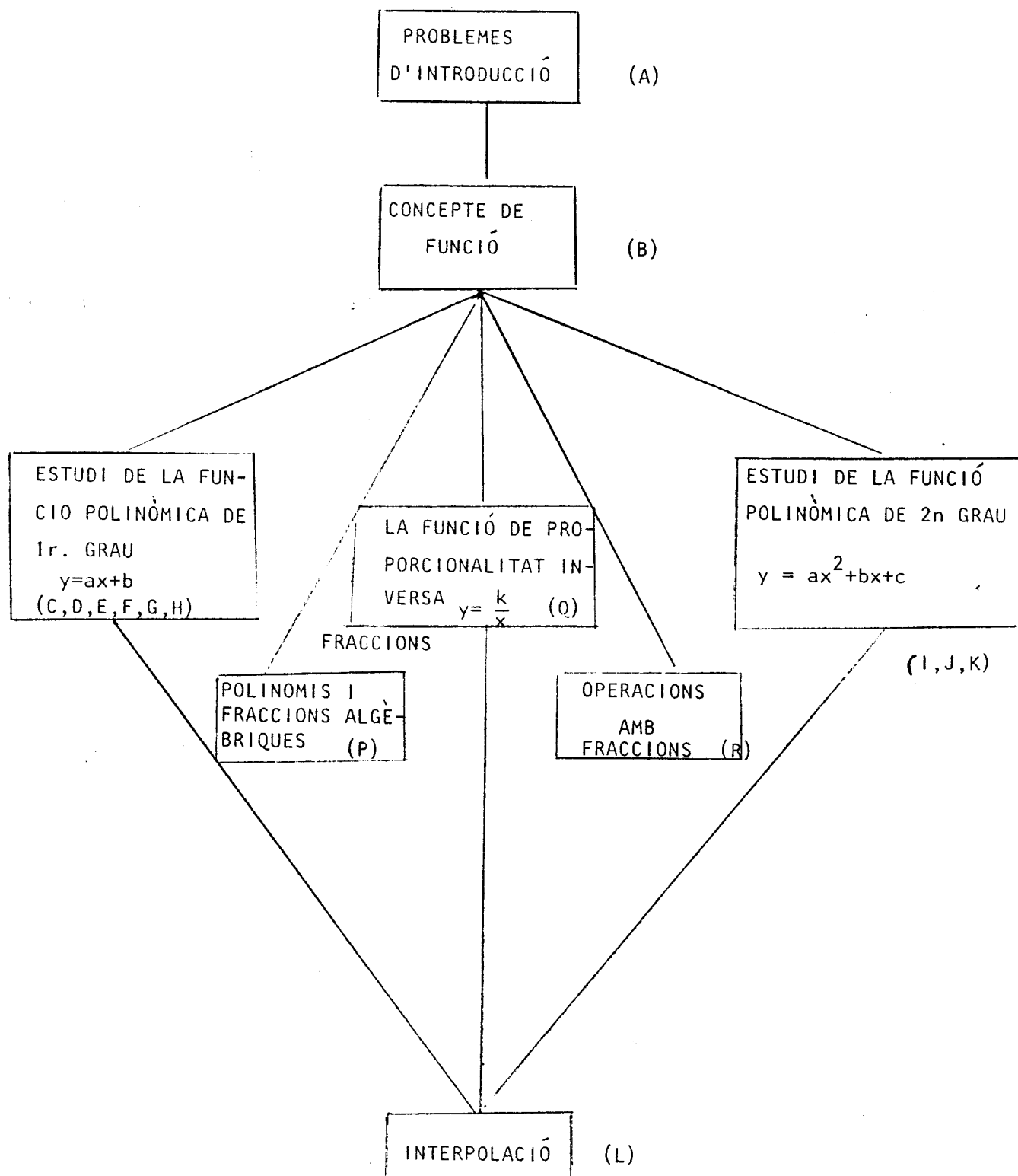
II. FRACCIONS ALGÈBRIQUES

Q. APÈNDIX 2. LA FUNCIÓ DE PROPORCIONALITAT INVERSA

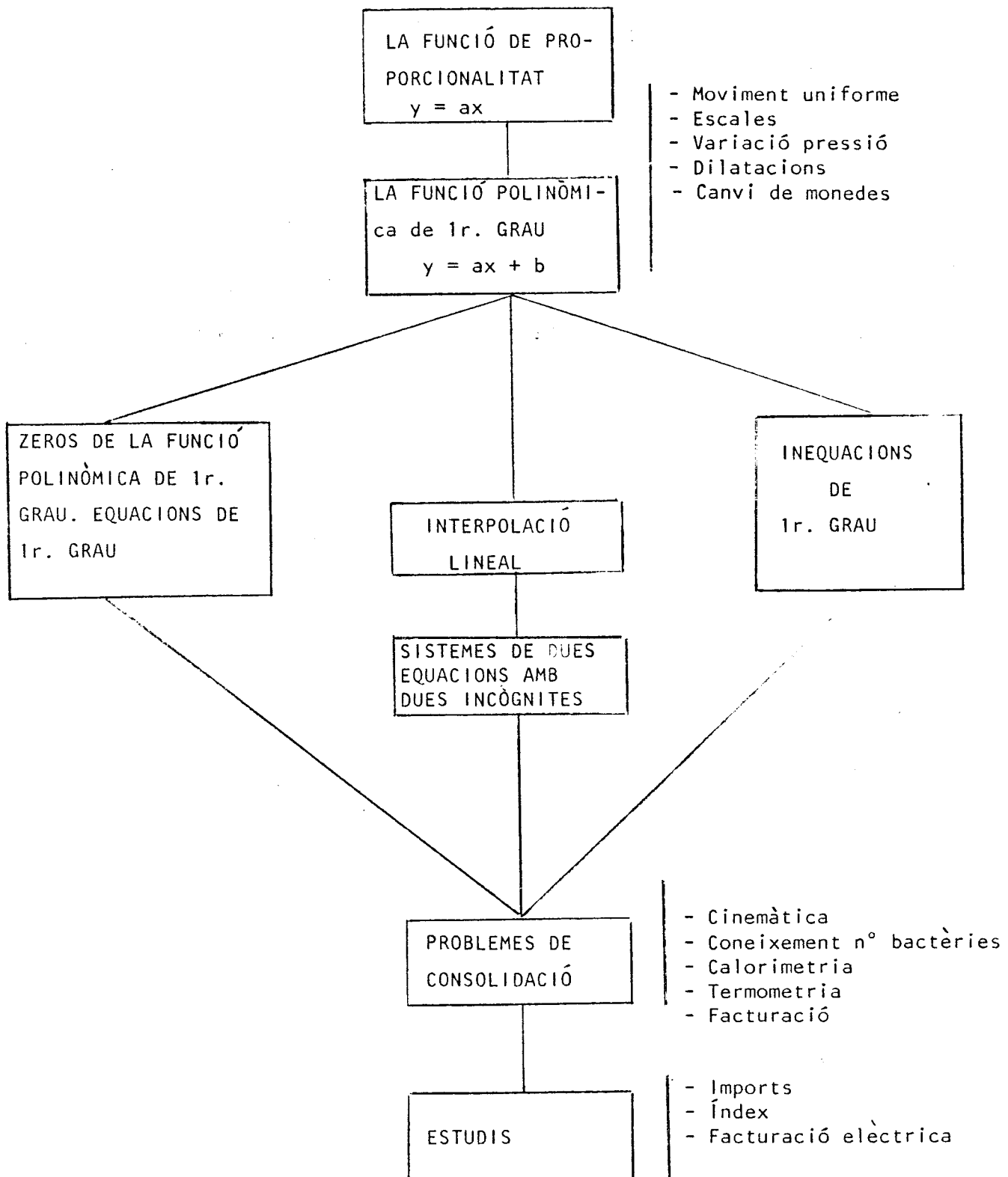
1. Problemes d'introducció
2. Estudi de la funció de proporcionalitat inversa
3. Problemes d'aplicació

R. APÈNDIX 3. OPERACIONS AMB FUNCIONS

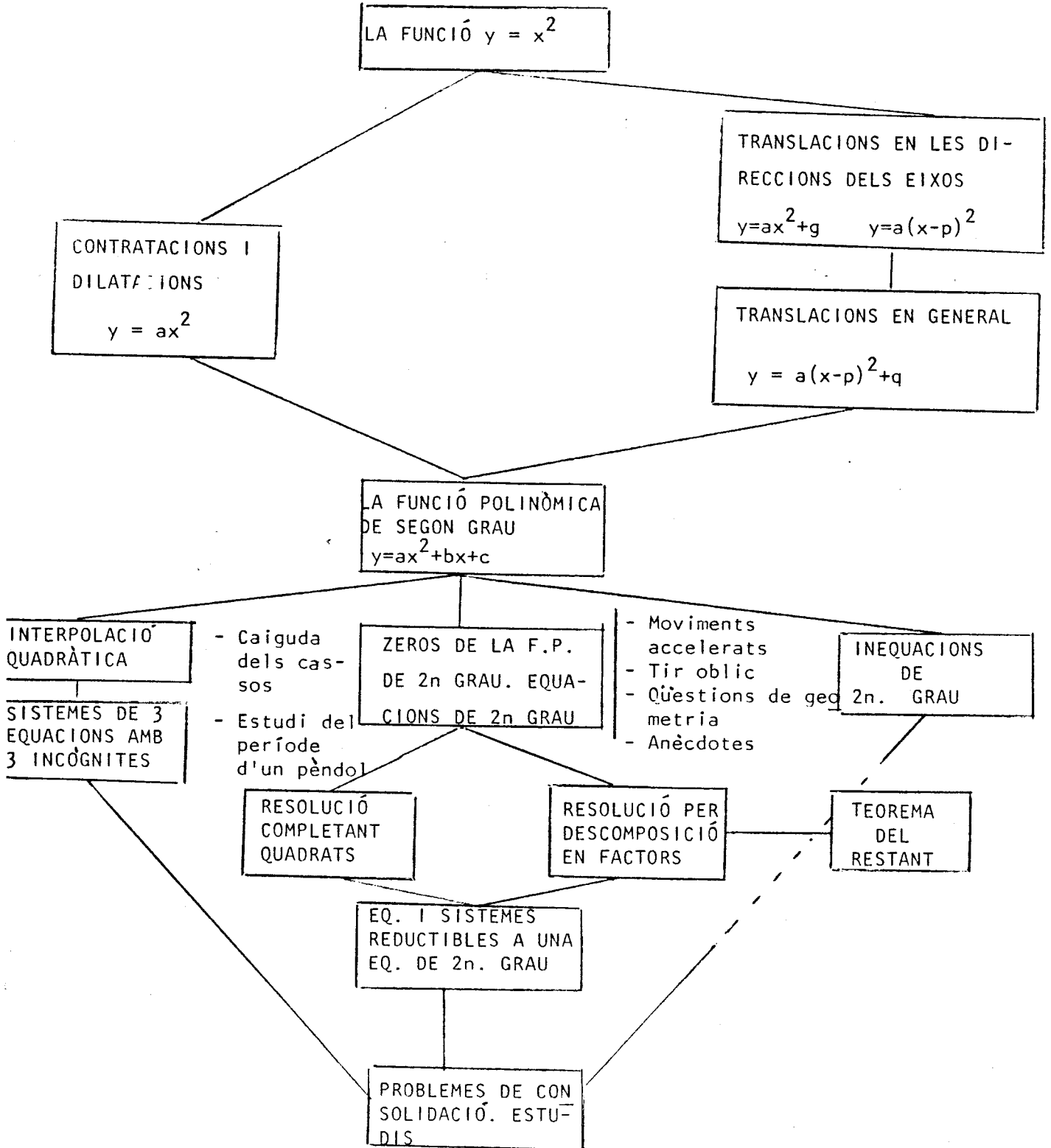
1. Problemes d'introducció
2. Suma i producte de funcions
3. Problemes d'aplicació

II. ESQUEMES1. Esquema general

2. Esquema de l'estudi de la funció polinòmica de primer grau



3. ESQUEMA DE L'ESTUDI DE LA FUNCIO POLINOMICA DE 2n. GRAU



L'esquema 1 és l'esquema general, que correspon a tot el llibre. En cadascun dels requadres s'indiquen els apartats en que està desenvolupada la qüestió corresponent. Les dues qüestions principals d'aquest esquema: l'estudi de la funció polinòmica de primer grau, i de la funció de segon grau, tenen cadascuna un esquema per separat, que són el 2 i el 3.

III. COMENTARIS

OBSERVACIONS GENERALS

Aquest llibre és el text més bàsic del tot el projecte. Els temes que es tracten són fonamentals a un nivell mig de coneixements, tant per la seva utilitat pràctica, com per qualsevol desenvolupament ulterior en matemàtiques. Per tant, el text està pensat per poder aprofundir molt, seguint en cada qüestió les quatre etapes descrites a l'apartat C de la guia general (introducció, model matemàtic, exercicis d'aplicació, problemes de consolidació). S'estudien molts temes relacionables entre ells i, precisament per això, es poden fer diferents programacions, segons l'amplitud amb que es vulgui estudiar el tema.

Si els programes fossin més racionals, aquest llibre fora tema per gairebé tot un curs, només caldria afegir-hi una mica de geometria. Hi ha molts aspectes que costen de madurar: concepte de dependència funcional; realització, lectura i interpretació de gràfiques; introducció de la x com a variable (qüestió que presenta moltes més dificultats de comprensió que la x com a incògnita), maduració de la idea de proporcionalitat i no proporcionalitat de magnituds, comprensió aprofundida de la funció afí, i el significat dels dos paràmetres: pendent i ordenada a l'origen; plantejament de problemes que porten a equacions, és a dir, aprendre a traduir textos de problemes al llenguatge útil de l'àlgebra; desenvolupament de l'habilitat de càlcul (equacions de 1r. i 2n. grau, sistemes, polinomis, inequacions). A més es tracten també d'altres temes més específics o tècnics que necessiten menys maduració, però també pràctica i treball, com la funció i equació de 2n. grau, la funció de proporcionalitat inversa i la interpolació.

Indiquem ara diferents maneres de programar el treball. Podem dividir els apartats en quatre tipus:

1. Temes: Apartats A, B, C, D, G, I, J, M
2. Temes que s'han d'intercalar: Apartats E, P
3. Temes laterals: F, Q, K, R
4. Complementes H, L

Els apartats del 1r. i 2n. grup cal incloure'ls dins una programació mínima. Els del 1r. grup s'han de tractar en l'ordre descrit. Els del 2n. grup que són E (equacions i sistemes de 1r. grau) i P (polinomis), estan assenyalats de manera diferent a l'esquema 4, per indicar que no s'ha d'esperar a tractar-los en el lloc que figuren a l'esquema, i que una part ha de ser intercalada abans. A fi de no oblidar aquesta qüestió important quan es fa la programació, consulteu previament els comentaris que fem a la guia sobre aquests apartats. Els temes laterals tot i que cal incloure'ls en la programació no són indispensables per a continuar l'estudi dels altres temes que figuren en el fascicle. Els temes considerats com a complementaris són optatius i cal triar quins es volen fer i quins es deixen per a un curs més avançat.

Hi ha tres temes que s'han posat com a apèndixs, que són: polinomis, funció de proporcionalitat inversa i operacions amb funcions. La raó és que no els hem volgut donar un ordre determinat. Pel que fa al tema de polinomis, ho acabem d'explicar. Els altres dos temes són temes laterals i poden ser estudiats en diferents moments

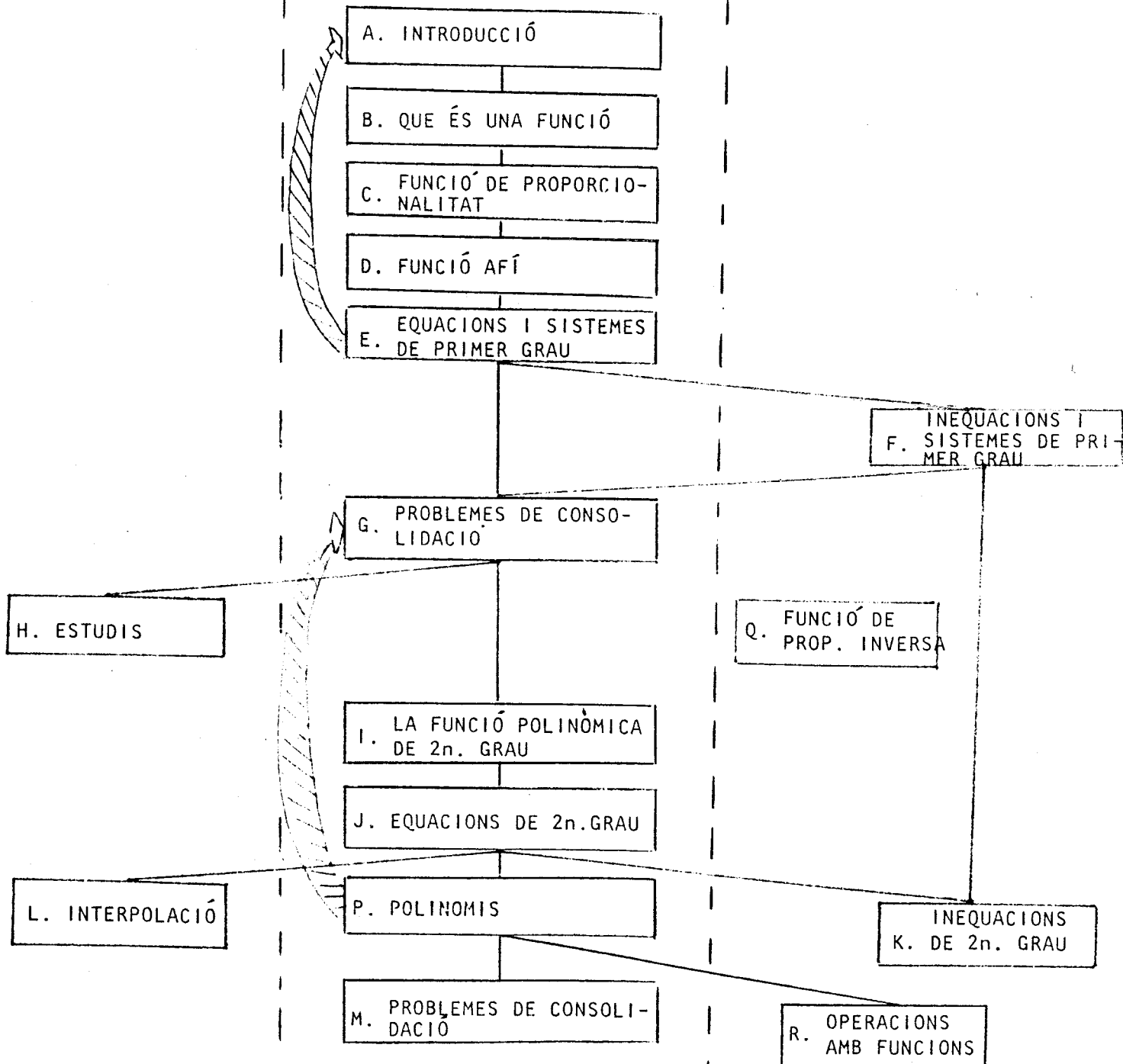
L'esquema il.lustra la situació

4. ESQUEMA. A TENIR EN COMPTE A L'HORA DE LA PROGRAMACIÓ

COMPLEMENTS

TEMES

TEMES LATERALS



A. PROBLEMES D'INTRODUCCIÓ

S'estudien aquí 10 problemes ben diferents, tant pel que fa als subjectes reals de que tracten com de la presentació (en forma de gràfics, taules, fórmules, etc.) o de les conseqüències pràctiques que se'n treuen. Donen una perspectiva ampla d'allò que s'estudiarà al text i familiaritzen l'alumne amb la idea de dependència entre variables. Són problemes fàcils i la dificultat principal radica en una bona lectura dels enunciats i en la realització curiosa de les gràfiques. Si no es volen fer tots, s'han de triar de tal manera que no s'empobreixi massa la varietat de situacions i d'aspectes diferents que permetran d'extreure després el concepte de funció.

Es treballa molt la representació gràfica de les funcions. En general, les representacions gràfiques són enriquidores i desvetllen la imaginació i la intuïció matemàtica, i alhora clarifiquen els conceptes.

Cal donar normes per fer els gràfics i convenir en disposar correctament els eixos i les unitats des dels primers problemes. Són qüestions importants i s'ha d'exigir una gran pulcritud en la realització de gràfics.

B. CONCEPTE DE FUNCIO

Partint d'aquests problemes s'introdueix la terminologia (variables independent i dependent, conjunts de sortida i d'arribada, regla, dependència, imatge i antiimatge dels elements) i es dona la condició perquè una correspondència sigui funció. Aquesta darrera definició queda justificada a partir dels problemes d'introducció on es veu la seva utilitat i de la idea de dependència que s'ha anat introduint a partir d'ells.

S'insisteix en la simbolització perquè és una qüestió amb la qual costa de familiaritzar-se.

També es sistematitzen les qüestions relatives als gràfics i es treballa la visualització dels conjunts de sortida, original, d'arribada i imatge, així com la condició perquè un gràfic representi una funció.

C. FUNCIÓ DE PROPORCIONALITAT

La funció de proporcionalitat és el model de funció més senzill. S'utilitza per a una varietat enorme de problemes pràctics i la maduració d'aquest model en la mentalitat de l'alumne és de gran importància per al desenvolupament del pensament científic. Les qüestions que destaquem com principals a aconseguir són:

- a) aprendre a distingir quan dues magnituds que depenen l'una de l'altra són proporcionals (o poden ser-ho) i quan no.
- b) interpretar el significat físic de la constant de proporcionalitat en cada problema i la seva interpretació geomètrica com el pendent de la recta; entendre que volen dir rectes de diferent pendent (per exemple, rectes que donen l'espai en funció del temps, per les quals el pendent representa la velocitat, etc.).
- c) manipular correctament el model, entenent, per exemple, el significat de la "regla de tres", la representació gràfica, etc.

Aquest apartat per ell sol, està tractat seguint les quatre etapes descrites a l'apartat C de la guia general (introducció, model matemàtic, manipulació i consolidació). Pel que fa als problemes de consolidació estan posats a l'apartat G juntament amb problemes de consolidació dels altres temes que s'estudien en els apartats següents. Triant els problemes de l'apartat G, formaria doncs una unitat didàctica que es podria treballar isoladament.

D. FUNCIONS QUE TENEN PER GRÀFICA UNA RECTA

Generalitzant a partir dels problemes treballats a l'apartat C, en alguns dels quals només eren proporcionals les variacions de les magnituds i no les mateixes magnituds, s'arriba fàcilment al nou model de la funció afí. Es treballen aquí els següents aspectes importants:

a) interpretació física dels dos paràmetres: pendent i ordenada a l'origen en cada problema.

b) representació gràfica de rectes a partir dels dos paràmetres esmentats i recíprocament, deducció, a partir de la gràfica dels valors d'ambdós paràmetres.

c) paral·lisme de rectes.

Des del punt de vista didàctic, en aquest apartat, la introducció és fonamentalment l'apartat C, i els problemes de consolidació figuren a l'apartat G, juntament amb d'altres problemes de consolidació.

E. EQUACIONS DE PRIMER GRAU AMB UNA INCÒGNITA I SISTEMES DE DUES EQUACIONS LINEALS AMB DUES INCÒGNITES

A l'apartat de les qüestions generals relatives a aquest llibre deiem que calia intercalar una part del tema d'equacions abans d'arribar aquí. Es tracta de l'aspecte pràctic o mecànic, que convé anar repassant simultàniament al desenvolupament dels apartats anteriors. En arribar en aquest apartat els alumnes ja han de tenir bona pràctica de la mecànica de la resolució d'equacions i conèixer quines operacions es fan per a transformar una equació en una altra d'equivalent més senzilla fins arribar a aïllar la x . La comprensió del significat de la x com a incògnita (és a dir, com un nombre que, encara que no és conegut a priori, és un nombre determinat que cal trobar) és molt més elemental que la comprensió de la x com a variable (1). La tècnica de la resolució de equacions tampoc no té gaires dificul-

(1) Recordem que, històricament, es van comprendre aquestes dues utilitzacions de les lletres amb molts segles de diferència. Els egipcis ja resolien equacions (papirus Rhind) (si bé generalment no simbolitzaven la quantitat desconeguda o incògnita simplement per una lletra, sinó que utilitzaven d'altres símbols més explicatius o fins i tot frases senceres que indicaven el seu significat real). En canvi la utilització de lletres per a simbolitzar quantitats arbitràries o variables no va ser compresa completament fins l'aparició de l'àlgebra al segle XIV generalment atribuïda al francès Viète.

tats si bé requereix pràctica i l'exigència que es raoni quina operació s'ha fet en cada cas per transformar una equació en una altra d'equivalent.

L'objectiu d'aquest capítol va doncs més enllà. Es tracta d'interpretar la resolució d'una equació de primer grau com la recerca dels valors de x que tenen imatge zero per la funció afí corresponent (l'antiimatge del zero). Interessa, doncs, interpretar genèricament una equació de 1r. grau i els diferents casos que es poden preguntar. L'altre aspecte que es vol treballar aquí és el plantejament i resolució de problemes que porten a equacions de primer grau. Amb tot gràcies al treball que s'ha fet previament en els apartats anteriors aquestes qüestions estan prou preparades i poden ser abordades amb èxit.

La recerca de l'equació de la recta que passa per dos punts, problema que ja s'havia treballat a l'apartat D determinant previament el pendent i encavat resolent una equació de primer grau per trobar l'ordenada a l'origen, porta ara a plantejar i resoldre un sistema de dues equacions amb dues incògnites. Aquest problema i el problema de trobar el punt d'intersecció de dues rectes permeten de fer la interpretació geomètrica dels sistemes de dues equacions i dues incògnites i els diferents casos que es poden presentar.

També aquí cal insistir en el planteig i resolució de problemes que donen lloc a sistemes d'equacions (n'hi ha d'enunciats a l'apartat G).

F. INEQUACIONS LINEALS. SISTEMES D'INEQUACIONS LINEALS

Tal com s'han treballat fins aquí les funcions, les equacions de 1r. grau i els sistemes d'equacions ja esta gairebé tot preparat per abordar el plantejament, resolució i interpretació geomètrica de les inequacions i sistemes d'inequacions lineals amb dues incògnites. Per tant és el moment adequat per a estudiar-lo. A més, és un tema important quan s'estudiïn en un curs més avançat els intervals de creixement i decreixement de les funcions, etc.

La consideració d'aquest apartat com a tema lateral feta a l'esquema 4 (so

bre la programació general del llibre) és deguda al fet que es pot continuar l'estudi del llibre sense fer aquest apartat.

G. PROBLEMES DE CONSOLIDACIÓ

En aquest capítol hi ha tota una col·lecció de problemes referents a tots els temes tractats fins ara.

H. ESTUDIS

S'inclouen aquí tres estudis de problemes reals que són complexes i que necessiten tot el bagatge treballat fins aquest moment.

El primer estudi fa referència a l'import sobre el rendiment del treball personal (I.R.T.P.), modalitat impositiva que ja no és vigent a causa de la reforma fiscal de l'any 1978. El motiu de no canviar l'enunciat és que el mètode serveix per a estudiar altres modalitats impositives. Així els mateixos alumnes poden fer l'estudi de l'actual sistema de retencions a compte i comparar-lo amb l'I.R.T.P. de l'època anterior. Les conclusions poden ser interessants.

El segon estudi, és sobre l'evolució del cost de la vida. També les dades s'aturen a l'any 1977 i els alumnes poden completar els valors posteriors. Aquest estudi es pot completar estudiant les causes i conseqüències de les variacions observades.

El tercer estudi és el més complet i, matemàticament, el més ric. Estudia la facturació elèctrica, i s'arriba a unes conclusions molt interessants. Com als altres estudis, les dades corresponen a una data fixa (juliol 1976) però la investigació pot partir de factures actuals, així com d'altres sistemes de facturació com el gas, el telèfon, etc.

Aquests estudis podrien ser interessants de fer com a conclusió o fi de tema. A la pràctica i amb els programes tan extensos que estem obligats a donar, no queda gaire temps de fer estudis com aquests. Els tres estudis que

proposen aquí tracten tres qüestions particulars, però fàcilment permeten d'utilitzar un mètode semblant per a estudiar altres temes relacionats. Podrien donar lloc a investigacions, per equips d'alumnes, i cada equip triaria un tema diferent que tingués relació amb algun dels tres estudis.

I. LA FUNCIO POLINÒMICA DE SEGON GRAU

D'una manera natural, després de l'estudi exhaustiu de la funció de primer grau i el coneixement d'altres funcions que no tenen per gràfica una recta, s'introdueixen les funcions polinòmiques de $2n$ grau.

Alguns problemes d'introducció porten a plantejar el seu estudi. Partint de la paràbola $y = x^2$ es trasllada en direcció primer de l'eix y , i després de l'eix x , i finalment es componen les dues translacions.

Deformant la paràbola $y = x^2$ amb un canvi d'unitats s'obté la paràbola $y = ax^2$, i repetint el procés de translacions s'arriba a poder situar una paràbola de qualsevol obertura amb el vertex situat a qualsevol punt del pla.

A continuació es planteja el problema invers: donada una funció polinòmica de $2n$. grau trobar el vertex i l'obertura. Refent les transformacions d'abans al revés, la qual cosa comporta les operacions de completar quadrats i treure factor comú, s'arriba al resultat volgut.

Es tracta també el problema de trobar la funció polinòmica de $2n$. grau que passa per tres punts, fet que porta a plantejar i resoldre sistemes de tres equacions de $1r$. grau amb tres incògnites.

J. ZEROS DE LA FUNCIO POLINÒMICA DE $2n$. GRAU. EQUACIONS DE $2n$. GRAU

El procés seguit a l'apartat anterior en fer l'estudi de la funció polinòmica de $2n$. grau prepara el camí per a resoldre equacions de $2n$. grau. Alguns problemes d'introducció fan palesa la necessitat d'aprendre a trobar les solucions, ja es disposa de la interpretació geomètrica i dels mètodes de càlcul que permeten d'arribar fàcilment a la fórmula de les solucions.

Després d'uns problemes d'aplicació i de l'estudi de les propietats de les arrels, es treballa també la resolució de les equacions de $2n$. grau per descomposició en factors, mitjançant el teorema del restant. També s'apren a resoldre algunes equacions de grau superior al $2n$. així com d'altres equacions que poden reduir-se a una de $2n$. grau.

K. INEQUACIONS DE $2n$. GRAU AMB UNA INCÒGNITA

Per a completar el tema s'estudien també les inequacions de $2n$. grau, que no comporten cap nova dificultat. Aquest tema només es podrà fer si, previament, s'ha fet el tema lateral F de inequacions de $1r$. grau. Ambdòs temes són importants per a la representació gràfica de les funcions amb l'ajut de les derivades en un curs més avançat.

L. INTERPOLACIÓ

Un complement interessant per la seva utilitat pràctica és el problema de la interpolació. Es planteja aquí el problema que sovint es dóna a la investigació científica de trobar una funció que s'ajusti a unes dades.

La interpolació d'una recta que passa per dos punts i una paràbola que passa per tres punts ja s'ha treballat en els apartats corresponents, respectivament, a funcions de $1r$. i $2n$. grau. S'estudien aquí algunes dades de laboratori referents a una molla i a unes fotografies de la caiguda d'un cos fetes a intervals de temps iguals, a fi de determinar les lleis que compleixen. Aquest segon problema és molt interessant i permet de veure l'existència d'una acceleració constant en tots els casos encara que les condicions inicials siguin diferents; permet, també, mesurar g .

M. PROBLEMES DE CONSOLIDACIÓ

Finalment hi ha 14 problemes de consolidació sobre la funció de $2n$. grau.

P. APÈNDIX 1. POLINOMIS I FRACCIONS ALGÈBRIQUES

El tema de polinomis figura com a apèndix a fi de facilitar que sigui treballat de la manera més àgil, intercalat entremig d'altres temes, o en paral·lel. És aconsellable de treballar una part important del càlcul amb polinomis abans del tema de 2n. grau, car la seva part algebàrica és prou complicada i exigeix un coneixement pràctic bastant complet del càlcul amb expressions algebriques. Si no s'estudien els polinomis en bloc abans del tema de 2n. grau, es poden treballar en paral·lel, proposant exercicis per a casa o en començar la classe, acabant quan s'arribi a la descomposició factorial de la funció de 2n. grau.

És un capítol que no es pot oblidar quan es faci la programació. El tema dels polinomis és senzill, però és molt important adquirir habilitat en el càlcul amb expressions literals.

Des del punt de vista didàctic és tractat com una unitat independent i completa. De tota manera, l'apartat R (apèndix 3) sobre operacions amb funcions és un bon complement d'aquest tema.

Q. APÈNDIX 2. LA FUNCió DE PROPORCIONALITAT INVERSA

La funció de proporcionalitat inversa es pot relacionar amb la funció de proporcionalitat, però és preferible estudiar-la després, amb més perspectiva, com un nou model de funció no polinòmica. En cas de lligar-la massa a la funció de proporcionalitat hi ha el perill de treure la conclusió que sempre que dues variables estiguin relacionades de tal manera que quan una augmenta l'altra disminueix, es tracta d'una funció de proporcionalitat inversa: qualsevol funció decreixent podria estar implicada, i si no tenim més referències no podem assegurar de quina es tracta.

R. APÈNDIX 3. OPERACIONS AMB FUNCIONS

És un tema complementari, però lligat al tema de polinomis pot servir de

justificació i de profundització. Els problemes d'introducció valen també per a justificar les funcions polinòmiques. És un capítol útil per a aprendre a analitzar i a representar funcions. No s'estudia la composició de funcions.