

0. SOBRE LES GUIES DELS LLIBRES.

La guia de cada llibre consta de tres apartats:

- Índex
- Esquema
- Comentaris

Als comentaris hi ha un primer punt d'observacions generals que cal tenir en compte en programar el tema.

Al tema 1, a més dels apartats assenyalats, hi figura, a títol d'exemple, la programació diària que es va fer durant un curs en un Institut.

Per tal de facilitar la programació interdisciplinària, al final de cada esquema s'inclouen els temes relacionats d'altres matèries que figuren en el text.

GUIA DEL LLIBRE 5: FUNCIONS EXPONENCIAL I LOGARÍTMICA

ÍNDEX

A. LA FUNCIO EXPONENCIAL

1. Estudi d'algunes propietats de les progressions geomètriques
2. Ampliació del domini de la progressió
3. La funció exponencial

B. LA FUNCIO INVERSA

C. ESTUDI DE LA FUNCIO LOGARÍTMICA

D. LA FUNCIO LOGARÍTMICA I EL CÀLCUL

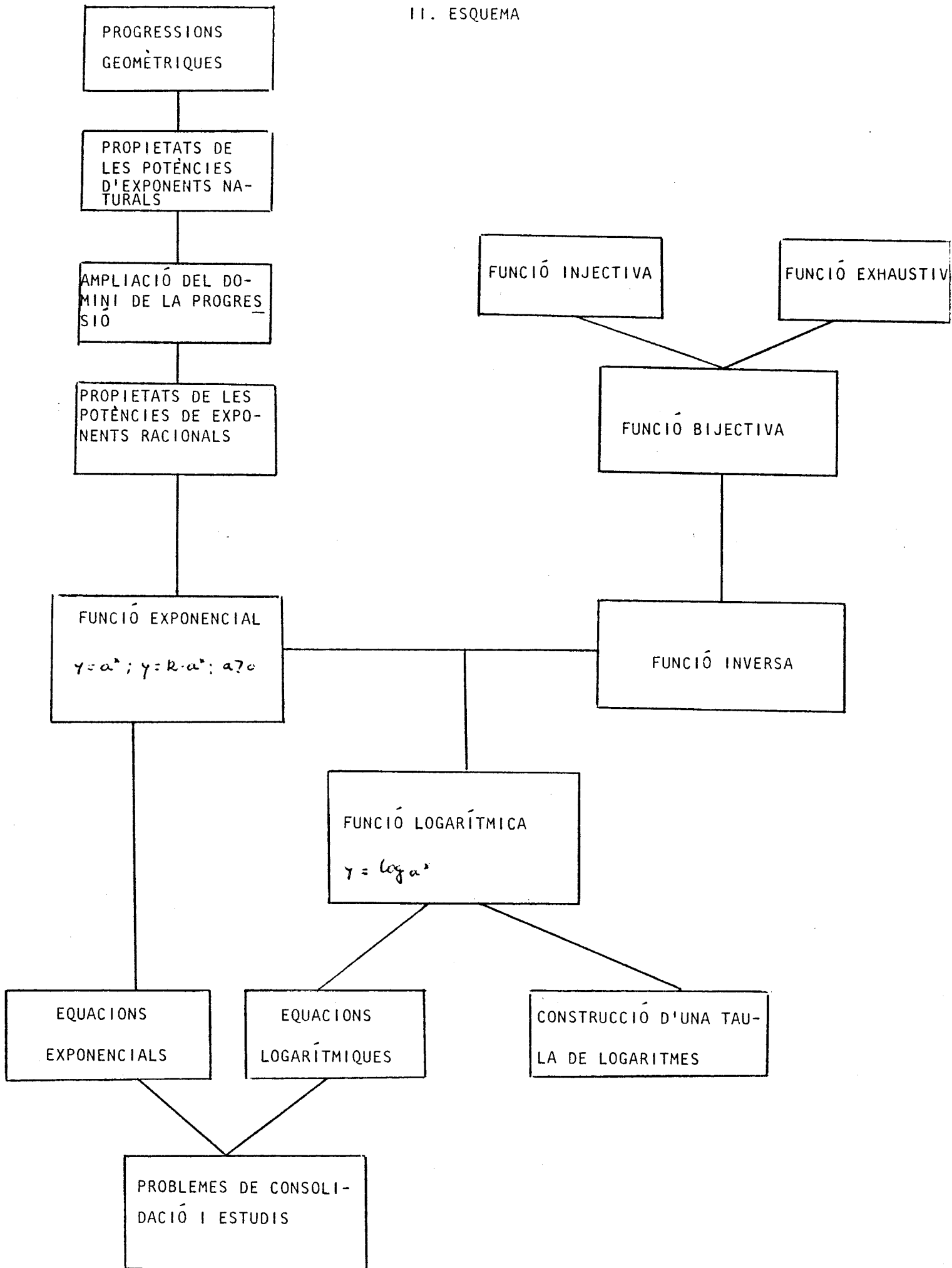
- . Construcció d'una taula de logaritmes

E. PROBLEMES D'APLICACIO

F. PROBLEMES DE CONSOLIDACIO

G. ESTUDIS

II. ESQUEMA



Temes relacionats amb d'altres matèries: radioactivitat, pressió atmosfèrica, altímetres, creixement biològic, construcció d'una guitarra, mortaldat per càncer.

III. COMENTARIS: OBSERVACIONS GENERALS

La funció exponencial està tractada com el resultat de l'ampliació del domini de les progressions geomètriques al conjunt \mathbb{R} dels nombres reals.

L'interès d'aquesta ampliació no és purament teòric sinó fruit d'una necessitat de molts problemes reals. Cal, doncs, que els alumnes s'adonin de quins tipus són els problemes que ens obliguen a ampliar el domini de les progressions, dels nombres naturals als nombres reals, fins a obtenir la funció exponencial i la seva inversa la funció logarítmica.

De la mateixa manera és important que vegin com les propietats de la funció logarítmica són molt útils i que varen ésser decisives per el càlcul de certes expressions i per a la resolució de les equacions exponencials.

A. LA FUNCIO EXPONENCIAL

El tema de la funció exponencial comença amb la resolució per part dels alumnes d'uns problemes d'introducció dels quals interessa que comprovin i sistematitzin les propietats de la funció

Després se'ls proposa la resolució d'un problema on poden constatar la necessitat d'ampliar el domini de la funció $\gamma = a^x$ de \mathbb{N} a \mathbb{R} .

Aquesta ampliació es fa en diferents etapes. D'antuvi es defineix $\gamma = a^x$ per $x \in \mathbb{N}$ i els alumnes han de comprovar que es segueixen complint les mateixes propietats que es complien per a exponents naturals.

En aquest moment se'ls demana la construcció de la gràfica de la funció, que han trobat resolent el problema proposat, per $x \in \mathbb{Z}$. (És necessari fer-la amb molta cura i tal com s'indica al fascicle perquè sinó sembla que els punts estan situats sobre una recta).

La definició d'un nombre elevat a una potència racional es dóna imposant que

les propietats vàlides per a exponents enters han de seguir essent vàlides per als exponents fraccionaris. L'experiència ens ha fet veure que en aquesta demostració el professor ha d'intervenir per explicar el procés de definició de $a^{p/q}$.

El càlcul d'una potència elevada a un nombre irracional el fem aproximant aquest nombre per una fracció i buscant en cada cas particular l'aproximació òptima.

Abans de demostrar les propietats per a exponents fraccionaris fem un parèntesi de càlcul amb radicals.

És necessari que els alumnes demostrin les propietats de les potències d'exponents fraccionaris (basant-se en les operacions amb radicals) i facin exercicis de manipulació sobre aquestes operacions per a adquirir agilitat.

Ara ja és possible completar la gràfica del problema que havia estat proposat per tal que els alumnes veiessin la necessitat d'ampliar el domini d'una progressió geomètrica.

Reprenent el problema de la desintegració d'una substància radioactiva del qual s'ha fet el gràfic només per valors de l'exponent p naturals es completa aquest gràfic donant-hi valors tant negatius com fraccionaris i s'obté el gràfic de la funció $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Es dibuixen els gràfics de les funcions $y = 2^x$, $y = 3^x$; $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ i els alumnes han de trobar les característiques de la gràfica de la funció exponencial segons la base sigui més gran que 1 o estigui compresa entre 0 i 1.

D'una manera intuïtiva han de veure quines d'aquestes gràfiques són creixents i quines decreixents, i també com l'eix d'abscisses és asímptota per a tots els casos.

Igualment s'estudien les funcions del tipus $y = k \cdot a^x$ i es troben les seves característiques segons el valor de k i d' a .

Després de resoldre tot tipus d'equacions exponencials i de sistemes d'equa

cions exponencials cal que es facin alguns problemes de consolidació (que siguin només de la part de la funció exponencial) i és també interessant que intentin de resoldre'n alguns on s'adonin de la impossibilitat de fer-ho amb els mecanismes apresos fins ara i vegin la necessitat de la construcció d'un altre tipus de funció (la funció logarítmica) que els permeti de resoldre aquests problemes.

B. FUNCIO INVERSA

Abans de fer l'estudi de la funció logarítmica que introduim com la funció inversa de la funció exponencial) cal parlar del concepte de funció inversa car és un tema que no s'ha treballat fins ara i és una bona ocasió per a veure'n el sentit i la utilitat.

Caldrà repassar els conceptes de domini i conjunt imatge d'una funció i fer els gràfics de diferents funcions per tal que els alumnes sapiguin veure --estudiant el gràfic d'una funció-- si és injectiva, exhaustiva o ambdues coses.

Després donem la definició analítica de funció injectiva i exhaustiva i després d'aplicar-la a diferents tipus de funcions han de trobar la condició perquè una funció tingui inversa.

Com a manipulació dels conceptes introduïts han de trobar la funció inversa d'unes certes funcions, donar-ne el domini i el conjunt imatge i representar f i f^{-1} en uns mateixos eixos per adonar-se que són simètriques respecte a la bisectriu de 1r. i 3r. quadrants.

C. LA FUNCIO LOGARITMICA

Presentem la funció logarítmica com la inversa de la funció exponencial fent que els alumnes escriguin la taula de la funció exponencial a l'inrevés i dibuixin la seva gràfica.

Cal que s'adonin de quin és el domini i el conjunt imatge de la funció lo-

garítmica quan es relacionan amb els de la funció exponencial.

Totes les propietats de la funció logarítmica es demostren a partir de les ja conegudes de la funció exponencial.

Després de l'exercici C-5 cal fer molts exercicis d'aplicació de les regles de càlcul logarítmic. Aquests exercicis de manipulació també podrien fer-se després de l'apartat D on s'utilitzen les propietats de la funció logarítmica per la construcció d'una taula de logaritmes.

És important que dibuixin en uns mateixos eixos les gràfiques de funcions logarítmiques en diferents bases i que trobin les característiques generals segons que la base sigui més gran o més petita que 1.

D. LA FUNCIO LOGARÍTMICA I EL CÀLCUL

Els orígens del càlcul logarítmic són explicats en una nota històrica on es veuen les possibilitats d'aquesta funció a l'hora de facilitar els càlculs.

Els primers càlculs de tipus logarítmic que va fer Stiffel surten de la comparació de la progressió aritmètica dels nombres enters i la progressió geomètrica de les potències enteres de 2.

Aquest punt de partida clarifica molt el procés de càlcul logarítmic.

A continuació, utilitzant les propietats dels logaritmes, es construeix una taula aproximada de logaritmes decimals. L'interès d'aquest treball és practicar el càlcul i veure com és possible trobar els valors dels logaritmes sense recursos màgics.

Si no es disposa de massa temps, no cal fer la taula de 1 fins a 100; es pot veure només el procediment per trobar els logaritmes dels nombres primers i a partir d'ells els d'alguns dels seus múltiples.

És necessari fer més exercicis de manipulació de les propietats de la funció logarítmica i resoldre equacions logarítmiques i sistemes d'equacions i

buscar algun problema de consolidació que permetin els alumnes d'aplicar les noves tècniques de resolució de problemes.

E. i F. PROBLEMES D'APLICACIÓ I DE CONSOLIDACIÓ

En aquest apartat n'hi ha sobre el procés de canvi de base, interès compost, creixement biològic, inversa d'una funció, etc...

És important que els alumnes constatin, a través d'aquests problemes (interès compost i creixement de població), la propietat característica de la funció exponencial: quan una variable y augmenta o disminueix respecta una altra x amb un tant per μ (o tant per cent) constant, per intervals constants de x , es tracta d'una funció exponencial.

Hi ha també exercicis on troben gràfics en paper logarítmic i semilogarítmic i cal que vegin en quins tipus de funcions és convenient emprar-lo i perquè.

Finalment, hi ha una introducció del número e basant-nos en els coneixements de l'alumne sobre l'interès compost i suposant que la reactualització del capital es fes no cada any sinó cada $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$... d'any.