

## 0. SOBRE LES GUIES DELS LLIBRES.

La guia de cada llibre consta de tres apartats:

- Índex
- Esquema
- Comentaris

Als comentaris hi ha un primer punt d'observacions generals que cal tenir en compte en programar el tema.

Al tema 1, a més dels apartats assenyalats, hi figura, a títol d'exemple, la programació diària que es va fer durant un curs en un Institut.

Per tal de facilitar la programació interdisciplinària, al final de cada esquema s'inclouen els temes relacionats d'altres matèries que figuren en el text.

## GUIA DEL LLIBRE 6: INTRODUCCIÓ A LES DERIVADES

### I. ÍNDEX

#### A. ASPECTES GLOBALS DE LES GRÀFIQUES DE LES FUNCIONS.

- . Funcions creixents i decreixents

#### B. ASPECTES LOCALS DE LES GRÀFIQUES

- . Màxims i mínims

#### C. TAXA MITJANA DE VARIACIÓ

- I. Variació d'una funció
- II. Taxa mitjana de variació
- III. La taxa mitjana de variació com a coeficient angular d'una recta

#### D. TAXA INSTANTÀNIA DE VARIACIÓ

- I. El coeficient angular de la recta tangent
- II. La caiguda d'un cos. Velocitat mitjana. Velocitat instantània
- III. Taxa instantània de variació o nombre derivada

#### E. FUNCIO DERIVADA

- I. Funció derivada d'una funció
- II. Funcions derivades d'algunes funcions elementals

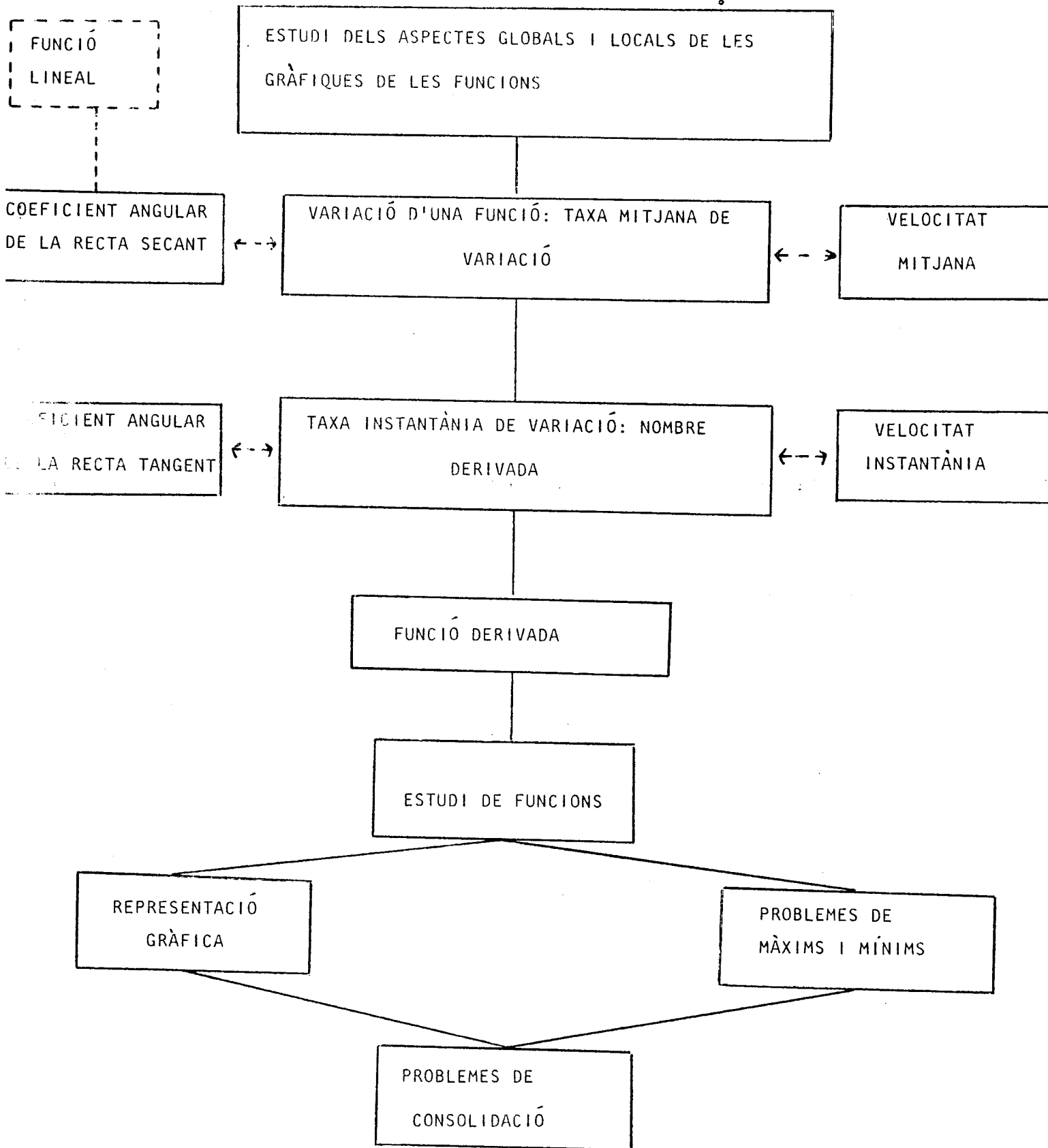
#### F. ESTUDI D'UNA FUNCIO

- I. El signe del nombre derivada
- II. Interval·ls de creixement i de decreixement. Màxims i mínims
- III. Simetries
- IV. Asímtotes
- V. Regionament del pla

G. PROBLEMES DE MÀXIMS I MÍNIMS

H. PROBLEMES DE CONSOLIDACIÓ

II. ESQUEMA



Temes relacionats amb d'altres matèries: mareas, llei de Boyle i Mariotte, temperatura de l'atmosfera, predicció del temps per variacions de la pressió atmosfèrica, velocitat, acceleració, càlcul de recipients de volum màxim i superfície mínima, cost marginal, minimització de costos.

### III. COMENTARIS

#### OBSERVACIONS GENERALS

En començar el tema és necessari conèixer el concepte de funció en general i de diversos tipus de funció en particular (lineals, quadràtiques, circulars, exponencial, logarítmica,...) per fer un estudi sobre els aspectes globals i locals de llurs gràfiques. És imprescindible un bon coneixement de la funció lineal, per la interpretació del concepte de derivada d'una funció  $f$  en un punt  $\underline{a}$ , com a coeficient angular de la recta tangent a la gràfica de  $f$  en  $\underline{a}$ .

L'objectiu primordial d'aquest llibre, no és que l'alumne calculi funcions derivades de funcions, quan més complicades millor (com si fos una màquina de derivar), sinó que arribi a entendre el concepte de nombre derivada d'una funció en un punt, interpretant-lo:

- des d'un punt de vista geomètric: coeficient angular de la recta tangent com a límit de coeficients angulars de rectes secants.
- des d'un punt de vista físic: velocitat instantània com a límit de velocitats mitjanes; consum d'aigua calenta per unitat de temps en un instant, com a límit de consums mitjos per unitat de temps, etc.
- Des d'un punt de vista matemàtic: taxa instantània de variació o nombre derivada, com a límit de taxes mitjanes preses en intervals cada vegada més pròxims al punt.

Es fa servir l'expressió "nombre derivada de  $f$  en el punt d'abscissa  $\underline{a}$ " en lloc de "derivada de  $f$  en el punt d'abscissa  $\underline{a}$ " per tal de remarcar que és precisament un nombre i diferenciar-lo de la funció derivada d'una funció.

### A. ASPECTES GLOBALS DE LES GRÀFIQUES DE FUNCIONS

Es comença el tema amb una aproximació intuïtiva als conceptes de funció creixent i funció decreixent en un interval, considerant la gràfica temps  $\longrightarrow$  profunditat de l'aigua, d'una marea i la d'una funció, altitud  $\longrightarrow$  temperatura de la atmòsfera.

Motivat per la necessitat dels conceptes tractats, es defineixen interval obert, interval tancat, semirecta oberta i semirecta tancada. Convé que els alumnes dibuixin els intervals perquè entenguin que són tots els punts corresponents a tots els nombres reals i no només els corresponents als enters.

### B. ASPECTES LOCALS DE LES GRÀFIQUES DE FUNCIONS

S'introdueix el concepte d'entorn d'un punt i es dona una definició de màxim relatiu, de funció creixent en un punt  $a$  i de funció creixent en un interval; els alumnes escriuen les de mínims relatiu i les de funció decreixent, observant les gràfiques de les funcions.

### C. TAXA MITJANA DE VARIACIÓ

Es tracta ara de trobar els valors de les variacions de les funcions i interpretar-ne el sentit. Així es calcula la variació de  $f$  entre  $x_1$  i  $x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) i amb un problema de previsió del temps a través de la variació de la pressió atmosfèrica, s'estudia la taxa mitjana de variació. Després de diverses situacions concretes que plantegen funcions temps  $\longrightarrow$  distància, temps  $\longrightarrow$  temperatura, temps  $\longrightarrow$  població, es fa l'abstracció per a qualsevol funció

A continuació, es veu que si la funció és una funció polinòmica de 1er. grau, la taxa mitjana de variació de  $f$  entre dos punts qualsevol  $x_1$  i  $x_2$  és constant i igual al coeficient angular de la recta.

Si la funció  $f$  és una qualsevol, la taxa mitjana de variació és diferent segons siguin els punts  $x_1$  i  $x_2$ , però sempre coincideix amb el coeficient angular de la recta secant a  $f$  determinada pels punts d'abscisses  $x_1$  i  $x_2$ . Si els alumnes no han vist anteriorment (llibre 2: Funcions lineals i quadràtiques) la determinació del coeficient angular d'una recta que passa per dos punts coneguts, convindrà que el professor ho expliqui.

#### D. TAXA INSTANTÀNIA DE VARIACIÓ

D.I. Des del punt de vista geomètric s'intenta entendre el concepte de recta tangent, és a dir, establir quin és el seu coeficient angular: això s'aconsegueix basant-nos en la idea de recta tangent com a aproximació de secants. Per a obtenir el coeficient angular de la recta tangent a  $f$  en el punt d'abscissa  $a$  els alumnes calculen els coeficients angulars de diverses rectes secants, que passin pel punt d'abscissa  $a$  considerat i un altre punt de la corba d'abscissa  $x$ , que es va acostant al primer. Aquests càlculs es fan per a  $x < a$  i per  $x > a$  obtenint dues successions i fent observar als alumnes que ambdues tendeixen al mateix número que indica precisament el coeficient angular buscat.

Es proposa, a continuació, d'escriure l'equació de la recta tangent.

D.II. Es treballa aquí, una aproximació des del punt de vista físic: la caiguda d'un cos i el problema de calcular la seva velocitat en un instant donat, problema que s'arriba a resoldre calculant les velocitats mitjanes en intervals de temps cada vegada més petits i establint la velocitat instantània en el moment  $t$ ,  $v(t)$ , com a límit de la velocitat mitjana  $V_m(t, t+h)$  quan  $h$  tendeix a zero.

D.III. Després d'aquest acostament paral·lel, a través del càlcul del coeficient angular de la recta tangent i de la velocitat instantània de caiguda d'un cos, i observant que s'ha arribat a expressions del mateix tipus, es defineix la taxa instantània de variació de  $f$  en el punt d'abscissa  $a$ , o

nombre derivada de  $f$  en el punt d'abscissa  $\underline{a}$ , com el valor  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  i l'escrivim  $f'(a)$ .

### E. FUNCIO DERIVADA

Després de calcular  $f'(a)$  per una serie de valors de  $\underline{a}$ , es defineix la funció derivada. Caldrà la intervenció del professor per a explicar els exemples de traçar la gràfica de la funció derivada a partir de la gràfica de la funció donada, tot observant els coeficients angulars de les rectes tangents.

En tractar, a continuació, les primeres regles de derivació, es suposa que els alumnes ja coneixen les operacions amb funcions (veure llibre 2), Funcions lineals i quadràtiques, apèndix 3); si no, caldrà l'explicació del professor. Només s'arriba a derivades de funcions polinòmiques o alguna altra de molt senzilla.

### F. ESTUDI D'UNA FUNCIO

Com a aplicació dels conceptes estudiats en el tema, es fa l'estudi d'una funció a través de la seva fórmula (i no de la seva gràfica com s'ha tractat de manera més intuïtiva als apartats A i B).

S'estudia la relació entre el signe del nombre derivada en un punt i el comportament de la funció a l'entorn d'aquest punt, per establir els intervals de creixement i decreixement.

Per al càlcul de màxims i mínims relatius s'estudia la condició necessària; per a la condició suficient es fa servir només el criteri de la primera derivada.

Es defineixen les funcions parelles i les funcions imparelles, representant-ne algunes i veient els avantatges que comporta conèixer si una funció presenta algun tipus de simetria.

Les asímptotes s'estudien només intuïtivament.



En començar el regionament del pla, es convenient que el professor expliqui un exemple a la pissarra.

#### G. PROBLEMES DE MÀXIMS I MÍNIMS

Només es donen problemes en els quals les funcions que apareixen són polinòmiques o bé d'algun altre tipus senzill que es calcula utilitzant la definició de derivada.

Per acabar, a l'apartat H hi ha problemes de consolidació de tot el tema.