UN EXEMPLE DE METODOLOGIA PER A BUP: LA FUNCIÓ EXPONENCIAL

A. Quin és l'objectiu de l'ensenyament de les matemàtiques? Nosaltres creiem que l'objectiu central de l'ensenyament de les matemàtiques és que l'alumne arribi a saber-ne fer: és a dir, que arribi a saber plantejar i resoldre problemes, que estigui familiaritzat amb els mètodes propis de les matemàtiques, que pugui reconèixer un concepte en una situació concreta, que sàpiga utilitzar el llenguatge matemàtic amb facilitat...

Considerem les matemàtiques com un instrument que permet la resolució de problemes, com una eina de treball i d'anàlisi. No com una ciència tancada en si mateixa, purament deductiva, feta de veritats inmutables.

Si ens atenim als origens concrets de la matemàtica i a les característiques de l'activitat matemàtica, hem de convenir que hi ha dos aspectes a distingir:

a) La comunicació entre matemàtics, de resultats matemàtics que utilitza un llenguatge formal (és el marc actual d'una presentació axiomàtica).

b) La producció de coneixements matemàtics.

La no distinció d'aquests dos aspectes, ens ha fet caure en el formalisme que tendeix a identificar les matemàtiques (els seus mètodes, els seus significats, la seva història) amb la seva abstracció axiomàtica formal. Així es presenten les matemàtiques d'una manera deductista que no té quasi res en comú amb el procés d'aprenentatge propi dels alumnes. Se'ls donen les abstraccions ja fetes en lloc d'ensenyar-les-els a fer.

La utilització d'un llenguatge especialitzat, la presentació d'unes matemàtiques ja elaborades en els quals unicament són vàlids els processos deductius, ha fet possible que n'oblidessim l'aspecte creador i la necessitat per a ell de la intuició, dels raonaments heurístics, de la inducció, de la capacitat de fer conjetures, i de buscar contraexemples, de la generalització de problemes concrets...

b. Quina metodologia cal utilitzar?.

Estem convençuts que aquets objectius no poden acconseguir-se sols amb el planteig i resolució circumstancial de problemes de caràcter més o menys pràctic els quals hom acostumava a posar als alumnes després de l'explicació de la "teoria".

Creiem que l'ensenyament de la matemàtica ha de fonamentar-se en la resolució de problemes, que facin arribar als alumnes per un costat al domini dels mètodes propis de la matemàtica i per l'altre a l'adquisició, demanera lenta però progressiva, de nous conceptes.

Respecte a això últim, els problemes han d'ésser significatius en relació als conceptes que volem introduir, a fi que aquets s'afirmin a partir del seu funcionament, tot procurant al mateix temps que es doni un procés dialèctic entre el funcionament d'aquest concepte i la seva formalització.

La teoria ha de tenir el paper que li dona sentit: el de classificar un conjunt de situacions i d'experiències suficientment ampli i no d'ocupar el lloc i de reduir els problemes a les aplicaicons.

De manera global els exercicis que trobem als llibres de text responen, per una part a l'esquema de classe "el professor explicala teoria, l'alumne escolta, pren nota i memoritza, i després fa problemes d'aplicació o de manipulació" i per altra reforcen la concepció dominant de les matemàtiques segons la qual primer cal saber la teoria totalment elaborada per arribar a resoldre problemes.

En línies generals, doncs, els problemes tenen únicament un objectiu: consolidar l'adquisició d'un coneixement i moltes vegades d'una definició, o cosolidar un automatisme.

Les situacions, els aspectes de la realitat als quals fan referència són presentats d'una forma adequada a les fórmules disponibles, amb la finalitat que aquests apareixin útils. Així, s'amaga a l'alumne la complexitat dels problemes reals, fent-li veure que aquets poden resoldre's per simple yuxtaposició dels problemes artificialment simplificats que proposem a classe.

Si volem educar la iniciativa personal, la capacitat d'enfrontar-se a nous problemes, el domini dels mecanismes d'abstracció, l'esprit crític, la familiaritat amb els mètodes propis de la matemàtica, haurem de dissenyar els problemes de manera que fomentin les activitats que portaran a aquesta educació.

En aquest sentit, la realitat a estudiar en els problemes senzills ha d'ésser interessant per a l'alumne. Han d'ésser problemes senzills i amb una redacció arientada, a fi que els pugui resoldre sense necessitat de conèixer el model.

Per tal que els alumnes portin a terme conscient els processos d'abstracció i de deducció, ells mateixos han d'esquematitzar, simplificar la realitat perquè aquesta sigui matematitzada. Moltes vegedes les nocions matemàtiques conegudes no seran sufucients i farà falta, i serà moment oportú, elaborar-ne de nou.

Per tal que l'alumne s'habituï al llenguatge propi de la matemàtica no tant sols per poder llegir, sinó també per poder expressar-se, caldrà que els problemes plantegin situacions on sigui necessari comunicar quelcom i comunicar-ho d'una manera precisa, unívoca.

És evident, per altra part, que no deixen de ser necessaris els problemes de simple aplicació de regles conegudes ni els d'adquisició d'automatismes de càlcul. Però cal situar-los al seu lloc.

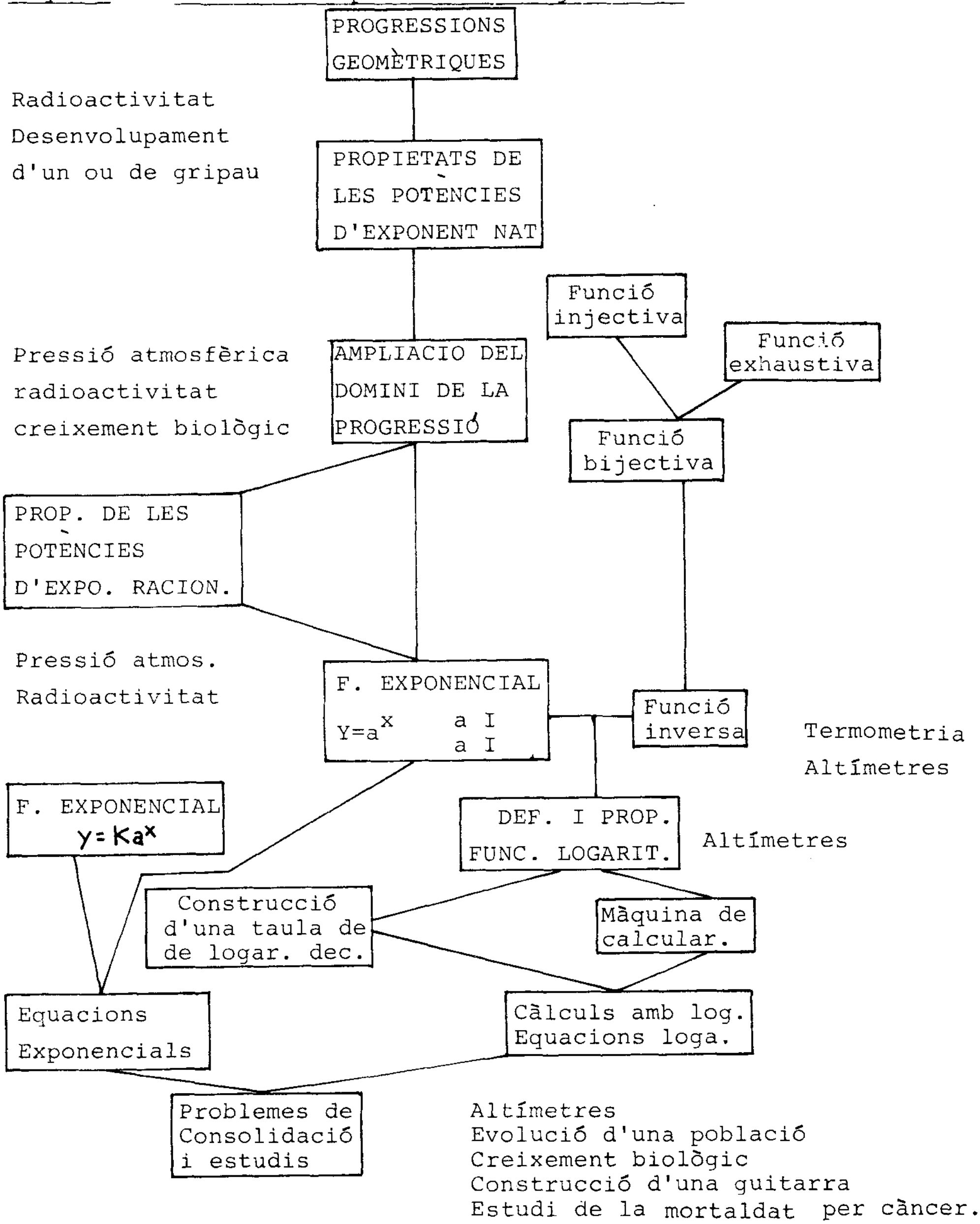
Cal tenir present també que l'adquisició d'un coneixement passa per tres etapes:

1. Una primera d'exploració, que ens situa a un nivell intuitiu, heurístic. És en aquesta fase on s'han de plantejar i resoldre problemes de les característiques abans esmentades.

2. Una segona de formalització, les definicions. És l'etapa de la construcció del model matemàtic que generalitza les situacions plantejades en la fase d'exploració.

3. Una tercera d'assimilació, on els nous coneixements haurien d'ésser digerits, absorbits dins el sistema de coneixements propi. Ací, junt amb problemes senzills d'aplicació de la teoria, cal plantejar situacions reals més complexes.

Esquema: La funció exponencial i logarítmica



La funció exponencial:

El tema comença amb la resolució d'uns problemes de progressions geomètriques, considerades com a funció $F:N \dashrightarrow R$, que fan referència a la radioactivitat i al desenvolupament d'un ou de gripau, que permeten sistematitzar i comprovar les propietats de les potències d'exponent natural.

La necessitat de l'aplicació del domini de les funcions del tipus $F:\underset{x \longrightarrow a^x}{N \longrightarrow R}$, als nombres enters, ens fa palesa en plantejar uns problemes sobre la pressió atmosfèrica i el creixement biològic . Apareix, a més, no com una conveniència purament teòrica sino fruit d'aquests problemes, que $a\text{-}n=\frac{1}{an}$ per a ne N. Els alumnes han de comprovar que es continuin complint les mateixes propietats que es complien per exponents naturals.

Donat que la pressió atmosfèrica varia de forma contínua, es plantja ara la necessitat d'ampliar el domini als nombres racionals o als irracionals. En una primera aproximació, es fa ús de les gràfiques que ja han dibuixat per a calcular algunes potències d'exponent fraccionari. La definició d'un nombre elevat a una potència racional es dóna impossant que les propietats vàlides per a exponents enters han de continuar essent vàlids per als exponents fraccionaris. El càlcul d'una potència elevada a un nombre irracional el fem aproximant aquest nombre per una fracció.

Emprant els gràfics de les funcions $f(x)=2^x$ $g(x)=0'5^x$ $h(x)=(\frac{1}{3})^x$ $k(x)=3^x$ $l(x)=2'5^x$ $p(x)=0'9^x$.

ELs alumnes han de trobar les característiques de la gràfica de la funció exponencial segons que la base sigui més gran que 1 o estigui entre 0 i 1. D'una manera intuitiva han de veure quines d'aquestes són creixents i quines són decreixents, i també com l'eix d'abcisses ésassímptota pera tots els casos.

Representar els problemes de laradioactivitat, la pressió atmosferica, el creixement biològic canviant-ne les funcions del tipus y=K.A.x i que es troben les seves característiques segons el valor de K i d'a.

Cal que els alumnes facin ara alguns problemes de consolidació dels coneixements que tenen de la funció exponencial i és també intereasant que intentin de resoldre'n alguns on s'adonin de la impossibilitat de fer-ho amb els mecanismes apresos fins ara i vegin la necessitat de la construcció d'un altre tipus de funció (la funció logarítmica) que els permeti de resoldre aquests problemes.

Funció inversa:

La necessitat de la funció logarítmica, que introduïm com a la funció inversa de la funció exponencial, apareix també en plantejar el probleme de l'altímetre és a dir el probleme d'escriure a la inversa la taula apareguda en l'estudi de la variació de la pressió atmosfèrica en funció de l'alçada. Abans, doncs, de fer l'estudi de la funció logarítmica cal parlar del concepte de funció inversa. La introducció d'aquest concepte,així com el de funció injectiva, exhaustiva i bijectiva, ve motivada també per un problema de termometría . Les definicions s'han de donar d'una manera progressiva,recolzant-se molt en l'estudi dels gràfics de funcions.

Funció logarítmica:

Totes les propietats de la funció logarítmica es demostren a partir de la ja conegudes de la funció exponencial. És important que dibuixin en uns mateixos eixos les gràfiques de funcions logarítmiques en diferents bases i que trobin les característiques generals segons que la base sigui més gran o més petita que 1.

No hem tractat ací els aspectes més de càlcul, com poden ésser les operacions amb radicals necessaris per a demostrar les propietats de les potències d'exponents fraccionaris, les equacions exponencials i logarítmiques, la construcció d'una taula aproximada de logarítmes decimals. Perquè encara que tenen el seu lloc i la seva importància en el tema, són menys significatius que la metodología que proposem.

Per acabar s'han de plantejar als alumnes nous problemes reals, noves situacions, ara més complexes, on sigui veritablement útil el model teòric establert. És important que els alumnes constatin, a través d'aquests problemes enfocats de la manera més realista (creixement de població, naixement biològic, in terès compost), la propietat característica de la funció exponencial quan una variable hi augmenta o disminueix respecte una altra x amb cas tant per u (o tant per cent) constant, per intervals constants de x, es tracta d'una funció exponencial.

Grup Zero. (Barcelona).